Тема 9. Логические основы ЭВМ.

1. Логика.

Информация, обрабатываемая в ЭВМ, представляется с помощью физических величин, которые могут принимать только два устойчивых состояния и называются «двоичные переменные».

Вычислительные устройства, или, в общем случае, устройства обработки информации, представляют собою совокупность элементарных логических схем, т. е. простых схем, обрабатывающих эти величины.

Логика – это наука о формах и способах мышления.

Основными формами мышления являются:

- понятие,
- высказывание
- умозаключение.

Понятие - фиксирует основные, существенные признаки объекта.

Высказывание - это любое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение о его истинности или ложности. При этом считается, что высказывание удовлетворяет закону исключенного третьего, т.е. каждое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Для того, чтобы можно было определить истинность или ложность высказываний, не вникая в их содержание, была придумана алгебра высказываний (алгебра логики).

Алгебра логики - это раздел математической логики, значения всех элементов (функций и аргументов) которой определены в двухэлементном множестве: 0 (ложь) и 1 (истина). Алгебра логики оперирует с логическими высказываниями.

В этой алгебре можно производить некоторые логические операции над высказываниями, получая в результате новые составные высказывания.

В алгебре логики все высказывания обозначают буквами a, b, c и т.д. Содержание высказываний учитывается только при введении их буквенных обозначений, и в дальнейшем над ними можно производить любые действия, предусмотренные данной алгеброй. Причем если над исходными элементами алгебры выполнены некоторые разрешенные в алгебре логики операции, то результаты операций также будут элементами этой алгебры

Логическая переменная - это переменная, принимающая состояние, соответствующая одному из двух элементов, например, 0 (ложь) или 1 (истина).

Логические выражение - составное высказывание, которое можно выразить в виде формулы, в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.

Для записи составных высказываний в виде логических выражений на формальном языке (языке алгебры логики) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними. Истинность или ложность составных высказываний можно определять чисто формально, руководствуясь законами алгебры высказываний, не обращаясь к смысловому содержанию высказываний.

2. Базовые логические операции.

2.1. Операция инверсия (отрицания).

Инверсия делает истинное высказывание ложным и наоборот, ложное - истинным. На формальном языке отрицание обозначают чертой над аргументом.

Таблица истинности	
A	F = ¬A
0	1
1	0

2.2. Конъюнкция (логическое умножение, логическое «И»).

Операция логического умножения, соответствующая функции «И», выдает в качестве результата значение, называемое логическим произведением.

Результат операции истинен тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

На формальном языке алгебры логики операция конъюнкции обозначается значком «&» или «^» или «*» (знаком умножения). Например, F = A & B. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	F = A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.3. Дизъюнкция (логическое сложение, логическое «ИЛИ»).

Операция логического сложения, соответствующая функции «ИЛИ», выдает в качестве результата значение, называемое логической суммой.

Результат операции истинен тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

На формальном языке алгебры логики операция дизъюнкции обозначается значком «+» или «\/». Например, F = A + B. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	F = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. Приоритет логических операций.

Приоритет выполнения операций:

1. Операция Инверсия (отрицания)
2. Операция Конъюнкция (логического умножения)
3. Операция Дизъюнкция (логического сложения).

3. Другие логические операции.

3.1. Сложение по модулю 2 (исключающее «ИЛИ»).

Результат операции истинен тогда, когда истинно только одно из входящих в него простых высказываний, но не оба одновременно.

На формальном языке алгебры логики операция исключающего «ИЛИ» обозначается значком «⊕». Например, $F = A \oplus B$. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	$F = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.2. Операция импликация (следование).

Операция имплекация равносильна логическому выражению $\neg A + B$ (не A или B).

Результат операции ложен тогда и только тогда, когда из истинной предпосылки (первого высказывания) следует ложный вывод (второе высказывание).

На формальном языке алгебры логики операция импликации обозначается значком «→». Например, $F = A \rightarrow B$. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	$F = A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3.3. Операция эквивалентность (равенство).

Результат операции истинен тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.

На формальном языке алгебры логики операция эквивалентности обозначается значком «~». Например, $F = A \sim B$. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	$F = A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.4. Штрих Шеффера.

Результат операции ложен тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны.

На формальном языке алгебры логики операция обозначается значком «|». Например, $F = A \mid B$. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	$F = A \mid B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.5. Стрелка Пирса.

Результат операции истинен тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно ложны.

На формальном языке алгебры логики операция обозначается значком «↓». Например, $F = A \downarrow B$. Аргументы могут принимать значения 1 или 0 и результат тоже только значения 1 или 0. Значение логической функции F можно определить из таблицы истинности этой функции.

Таблица истинности		
A	B	$F = A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4. Основные законы логики

Законы логики отражают наиболее важные закономерности логического мышления. В алгебре высказываний законы логики записываются в виде формул, которые позволяют проводить эквивалентные преобразования логических выражений в соответствие с законами логики.

4.1. Закон тождества.

Всякое высказывание тождественно самому себе:
$A = A$

4.2. Закон непротиворечия.

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание А - истинно, то его отрицание не А должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:
$A \& \neg A = 0$

4.3. Закон исключенного третьего.

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина:
$A + \neg A = 1$

4.4. Закон двойного отрицания.

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:
$\neg \neg A = A$

5. Теоремы Булевой алгебры.

1. $\neg\neg x = x$
2. $x + 0 = x$
3. $x + 1 = 1$
4. $x * 1 = x$
5. $x * 0 = 0$
6. $x + x = x$
7. $x * x = x$
8. $x + x * y = x$
9. $x * (x+y) = x$
10. $x + (\neg x * y) = x + y$
11. $x * (\neg x + y) = x * y$

Правило коммутативности. В обычной алгебре слагаемые и множители можно менять местами. В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

12. $x + y = y + x$
13. $x * y = y * x$

<u>Правило ассоциативности</u>. Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять:

14. x + y + a = (x + y) + a = x + (y + a)
15. x * y * a = (x * y) *a = x * (y * a)

<u>Правило дистрибутивности</u>. В отличие от обычной алгебры, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре высказываний можно выносить за скобки как общие множители, так и общие слагаемые:

16. x * (y + a) = x * y + x * a
17. x + y * a = (x + y) * (x + a)

<u>Законы де Моргана</u>. Отрицание логической суммы равно логическому произведению отрицаний и отрицание логического произведения равно логической сумме отрицаний:

18. ¬(x + y)= ¬x * ¬y
19. ¬(x * y)= ¬x + ¬y

6. Минимизация логических функций.

Для упрощения логических (булевых) функций используют тождества математической логики, рассмотренные ранее. На самом деле их эффективное использование требует навыков и искусства в манипулировании ими, которые приходят только после определенного опыта подобных преобразований. В то же время существует несколько стандартных приемов, которые в большинстве случаев позволяют упростить достаточно сложные логические формулы.

Упрощение логического выражения начинают обычно с поиска следующих форм: $A\overline{B} + AB$, $A + AB$, $A + \overline{A}B$, где A и B обозначают либо сами логические переменные, либо логические произведения множества переменных. Каждое из полученных выражений может быть записано в более простой форме следующим образом:

$$\begin{aligned} &A\overline{B} + AB = A(\overline{B} + B) = A; \\ &A + AB = A(1 + B) = A; \\ &A + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B = A + B. \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Возьмем, например, формулу:

$$f = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z$$

и попытаемся ее упростить, используя изученные тождества. Группируя первый и четвертый термы, затем третий и пятый, и применяя первое из тождеств (6.1), получим:

$$f = \overline{x} \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot z.$$

Далее выражение упрощается без особой сложности:

$$f = \overline{x}(y + \overline{y}z) + xz = \overline{x}(y + z) + xz = \overline{x}y + \overline{x}z + xz = \overline{x}y + z.$$

Пример:

Упростить логическое выражение:

(A * B) + (A * ¬B).

Воспользуемся правилом дистрибутивности и вынесем за скобки A:

(A * B) + (A * ¬B) = A * (B + ¬B).

По закону исключенного третьего B + ¬B = 1, следовательно:

A * (B + ¬B) = A * 1 = A.